الدوال الأصلية و اللوغاريتم النبيري

الأستاذ : صالح بن الصغير

ثانية باك علوم

سلسلة: X- Math

طرائق / تمارين تطبيقية
تمارين
مسائل
امتحان الوحدة
حلول

طريقة 1 : استعمال الشكل $\frac{u'}{u}$ لتحديد دالة أصلية لدالة.

نحاول إظهار $\frac{u'(x)}{u(x)}$ ، كلما أمكن ذلك، التي أصليتها هي $\ln|u(x)|$ حيث $u(x) \neq 0$.

5 حدد دالة أصلية للدالة f المعرفة على I : بـ :

1. $f(x) = \frac{1}{7x+1}$ ، $I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{7}\right\}$ ؛
2. $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ ، $I = \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

1. نظهر الشكل $\frac{u'(x)}{u(x)}$ ، لأجل هذا نضرب كل من المقام و البسط في 7 ، فنحصل على :

$$f(x) = \frac{1}{7x+1} = \frac{1}{7} \times \frac{7}{7x+1} = \frac{1}{7} \times \frac{(7x+1)'}{7x+1}.$$

دالة أصلية لـ $x \to \frac{(7x+1)'}{7x+1}$ هي إذن $x \to \ln|7x+1|$

و منه دالة أصلية لـ $x \to \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x+1)'}{7x+1}$ هي الدالة $x \to \frac{1}{7}\ln|7x+1|$

دالة أصلية لـ ku هي kU ، حيث U أصلية لـ u $\left(k = \frac{1}{7}\right)$

← الدوال الأصلية لـ f معرفة على $I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{7}\right\}$ بما يلي :

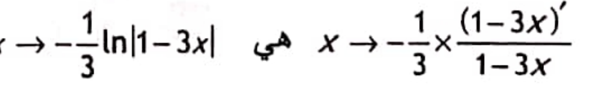
$F(x) = \frac{1}{7}\ln|7x+1| + c$ ، حيث $c \in \mathbb{R}$.

2. نظهر الشكل $\frac{u'(x)}{u(x)}$ ، لأجل هذا نضرب كل من المقام و البسط في -3 ، فنحصل على :

$$\frac{1}{1-3x} = \frac{1}{-3} \times \frac{-3}{1-3x} = \frac{1}{-3} \times \frac{(1-3x)'}{1-3x}$$

$\frac{(1-3x)'}{(1-3x)}$ هي على شكل $\frac{u'}{u}$

دالة أصلية لـ $\frac{(1-3x)'}{1-3x}$ هي إذن $\ln|1-3x|$.



و منه دالة أصلية لـ $x \to -\frac{1}{3} \times \frac{(1-3x)'}{1-3x}$ هي $x \to -\frac{1}{3}\ln|1-3x|$ ،

إذن الدوال الأصلية لـ f معرفة على $I=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ بما يلي :

$F(x)=-\frac{1}{3}\ln|1-3x|+c$.

لكل $x>\frac{1}{3}$ ، $1-3x<0$ و منه $|1-3x|=-(1-3x)=-1+3x$ ؛

و بالتالي $F(x)=\frac{1}{2}\ln(3x-1)$ دالة أصلية للدالة f على $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

تأكد أن $u(x)>0$ عندما تستعمل " $\ln u(x)$ هي دالة أصلية لـ $\frac{u'(x)}{u(x)}$ "

: $\forall x\in\left]\frac{1}{3},+\infty\right[;\ 3x-1>0$

تمرّن : حدد دالة أصلية للدوال التالية على المجال المناسب I .

.1 $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ $I=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ .2 $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ $I=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ (انتبه إلى المجال!)

جواب : .1 $F(x)=\frac{1}{2}\ln(2x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f على $I=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

.2 $F(x)=\frac{1}{2}\ln(-1-2x)$ هي دالة أصلية للدالة f على $I=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$.

6 حدد دالة أصلية للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

نضرب كل من المقام و البسط في 2 ، فنحصل على : $f(x)=\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$

$\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$ هي على شكل $\frac{u'}{u}$ إذن $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$\ln|x^2+1|=\ln(x^2+1)$ لأن $\forall x\in\mathbb{R};\ x^2+1>0$.

تمرّن : حدد دالة أصلية للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

.1 $f(x)=\frac{8x^3+4x}{x^4+x^2+1}$ .2 $f(x)=\frac{1}{\tan x}$

جواب : .1 $F(x)=2\ln(x^4+x^2+1)$ .2 $F(x)=\ln|\sin x|$.

تمرّن : نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$

حدد عددين حقيقيين a و b حيث $f(x)=a+\frac{b}{x-1}$. ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$.

لكل x من $]1;+\infty[$: $a+\frac{b}{x-1}=\frac{ax+(b-a)}{x-1}$. $\frac{x-2}{x-1}=\frac{ax+(b-a)}{x-1}$ ← $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

نعوض a بـ 1 و b بـ -1 في التعبير $f(x)=a+\frac{b}{x-1}$ فنحصل على $f(x)=1-\frac{1}{x-1}$.

• دالة أصلية لـ $f(x)$ على $]1;+\infty[$ هي $F(x)=x-\ln(x-1)$.

f دالة جذرية ، أي خارج دالتين حدوديتين . من الصعب تحديد دالة أصلية لمعظم الدوال الجذرية ، دون أن نقوم بتغيير تعبير الدالة. لهذا ، هنا، يقترح التمرين كتابة $f(x)$ على شكل آخر.

تمارين

1 ★ — 10د الحل ص. 297

أحسب مشتقة الدوال التالية دون أن تهتم بحيز تعريفها و لا حيز اشتقاقها.

.a $x \to \frac{1-4\ln x}{\ln x}$ .b $x \to \frac{\ln(x^2)}{\ln(x+1)}$ .c $x \to \frac{\ln 2}{\ln(1+x)}$.

2 ★ — 10د الحل ص. 297

أحسب مشتقة الدوال التالية دون أن تهتم بحيز تعريفها و لا حيز اشتقاقها.

.a $f(x)=\ln\left[(x^2+1)\sqrt{x}\right]$ .b $f(x)=\frac{(x-1)^3.\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

3 ★★ — 10د الحل ص. 298

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$

1. بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ ، $f(x)=\ln(2x)-\ln(x+1)$
2. أحسب $f'(x)$ بطريقتين مختلفتين .
3. أدرس إشارة $f'(x)$.

4 ★★ — 10د الحل ص. 299

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$ لكل $x\neq 0$ و $f(0)=0$.

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0. (لأجل هذا ندرس مباشرة نهاية الخارج $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ عندما يؤول x إلى 0)
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على $]0,+\infty[$ ، ثم أحسب $f'(x)$.

5 ★★ — 15د **تطبيقات : تغيرات دالة** الحل ص. 299

أدرس تغيرات الدوال التالية على المجال I :

.1 $f(x)=\ln((x-1)(x+1))$ $I=]1;+\infty[$ .2 $f(x)=\ln\frac{2}{1+x^2}$ $I=\mathbb{R}$

6 ★★ — 07د الحل ص. 300

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-3[$ بـ : $f(x)=\frac{2x^2+7x+4}{x+3}$

1. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c حيث $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$
2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-\infty;-3[$.

b. استنتج الدالة الأصلية G لـ f التي تحقق $G(-4)=-4$.

7 ★★ — 07د الحل ص. 300

حدد دالة أصلية للدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$

8 ★★ — 10د الحل ص. 301

1. بين أن الدالة g هي دالة أصلية لـ f على المجال I

$g(x)=x\ln x-x$ ، $f(x)=\ln x$ $I=]0,+\infty[$

استنتج دالة أصلية للدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $h(x)=-x+2+3\ln x$.

2. تحقق أن الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\ln x\right)$.

هي دالة أصلية للدالة f المعرفة بـ $f(x)=-x\ln x$.